ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ

Д. Ветров[1], Д. Кропотов[2]

[1] 119991, Москва, ГСП-1, ул.Вавилова, д.40, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, vetrovd@yandex.ru
[2] 119991, Москва, ГСП-1, ул.Вавилова, д.40, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, dkropotov@yandex.ru

В данной работе предлагается метод для решения задачи фильтрации специального вида. Рассматривается частная задача устранения значительных помех, связанных с частичной потерей сигнала, сбоя прибора измерения и т.д. В основе алгоритма лежит вероятностный подход к фильтрации. Эффективность предлагаемого метода продемонстрирована на задаче предварительной обработки пупиллограмм – реакции зрачка глаза на вспышку света.

Введение

Задача цифровой обработки сигналов возникает в широком спектре практических задач анализа данных, прогнозирования и принятия решений. В данной работе рассматривается задача устранения помех специального вида, вызванных частичной потерей сигнала. Существующие методы фильтрации сигналов, в принципе, позволяют устранить помехи, однако их действие основано на том или ином сглаживании сигнала [2]. Результатом этого является потеря локальных особенностей полезного сигнала, которые часто являются основными объектами последующего исследования. Возникает необходимость разработки и реализации таких методов фильтрации, которые бы с одной стороны устраняли значительные помехи, а с другой - оказывали бы минимальное влияние на вид незашумленного сигнала. Возможным инструментом для такой обработки является теория вероятностей и, в частности, принцип максимума правдоподобия. Рассмотрение сигнала как реализации случайного процесса с некоторыми очевидными в случае исследуемой задачи свойствами позволяет оценить степень правдоподобия появления той или иной точки в полезном сигнале. При этом точка, обладающая максимальным правдоподобием, сохраняется в сигнале, а предшествующие ей отбрасываются как помехи. Заметим, что аналогичные идеи используются при структурном анализе сигналов, в частности, при построении скрытых марковских моделей [1]. Однако, в данной работе рассматриваются вопросы применения этих методик к задаче фильтрации сигнала.

В следующей главе будет изложена конструкция дискретного вероятностного фильтра. Затем будет уделено внимание решению одной из проблем, возникающей при применении предлагаемого алгоритма фильтрации – поиску первой точки полезного сигнала. В части 4 предлагаются результаты практических экспериментов и сравнение с другими методами фильтрации.

Разработка дискретного вероятностного фильтра

Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется зашумленный сигнал, известный в моменты времени $t_1,\ldots,t_T$. Будем рассматривать случай равномерной сетки, т.е. когда $t_i = t_1 + h(i-1)$ и обозначать исходный сигнал через $x[i]$, где $i = 1,2,\ldots,T$. Необходимо построить фильтр, формирующий на выходе сигнал $y[i]$ таким образом, чтобы фильтрованный сигнал не содержал в себе существенных неоднородностей, связанных с частичной потерей исходного сигнала при за-

мере. В случае отсутствия подобных неоднородностей, сигнал не должен подвергаться изменениям, т.е. $y[i] = x[i], i = 1, \ldots, T$.

Рассмотрим последовательную процедуру фильтрации сигнала. Предположим, что имеется некоторая точка $x[i_0]$, про которую известно, что она является первой точкой полезного сигнала, т.е. $\forall 1 \le i < i_0, y[i] \ne x[i], y[i_0] = x[i_0]$. Возможная процедура для нахождения такой точки будет описана ниже. Определим меру правдоподобия принадлежности точки полезному сигналу при условии, что точка $x[i_0]$ принадлежит полезному сигналу следующим образом:

$$l(i,i_0) \triangleq l\{y[i] = x[i] \mid y[i_0] = x[i_0]\} = \\ = -\frac{(x[i] - x[i_0] - M_{i,i_0})^2}{2\Sigma_{i,i_0}^2} - \ln(\sqrt{2\pi}\,\Sigma_{i,i_0}) \qquad (1)$$

Здесь, M_{i,i_0} и Σ_{i,i_0} выражаются формулами через так называемые центроидное и вариационное поля соответственно:

$$M_{i,i_0} = \sum_{k=i_0}^{i} \mu[k] \qquad (2)$$

$$\Sigma_{i,i_0} = \sqrt{\sum_{k=i_0}^{i} \sigma^2[k]} \qquad (3)$$

При фиксировании очередной полезной точки сигнала следующая точка находится путем максимизации по моментам времени функции правдоподобия (1). Совокупность построенных таким образом точек мы будем называть *допустимыми*. Остальные точки сигнала $x[i]$ рассматриваются как помехи и игнорируются. Таким образом, полезный сигнал $y[i]$ представляет собой последовательность допустимых точек, в промежутках между которыми сигнал достраивается путем интерполяции.

Вид функции правдоподобия (1) связан со следующими обстоятельствами. Пусть исходный сигнал представляет собой реализацию некоторого случайного процесса $\varsigma(t)$. В исследуемой задаче мы пытаемся бороться со значительными случайными помехами, которые не поддаются объяснению с точки зрения предыдущих наблюдений. Принимая во внимание это обстоятельство, вполне естественно предположить, что имеет место следующее представление:

$$\varsigma(t_1) - \varsigma(t_0) = A(t_0,t_1)(\xi(t_1) - \xi(t_0)) + \\ + B(t_0,t_1) + \eta(t_1), \forall 0 \le t_0 < t_1 \le T \qquad (4)$$

Здесь $\xi(t)$ - винеровский процесс, а $\eta(t)$ - процесс с неизвестными свойствами, отражающий наличие неоднородностей в сигнале. Используя (4), можно доказать, что в случае отсутствия значительных помех разности исходного случайного процесса, соответствующим образом центрированные и нормированные, подчиняются стандартному нормальному распределению. Последнее естественным образом приводит к методу фильтрации, основанном на применении принципа максимума правдоподобия. Пусть известно, что в некоторой точке сигнал не подвергнут искажениям, тогда определение следующей точки неискаженного сигнала сводится к максимизации плотности вероятности нормального распределения, что и отражает формула (1).

Для реализации указанного алгоритма фильтрации необходимо оценить центроидное и вариационное поля. Центроидное поле $\mu[i]$ можно рассматривать как наши ожидания относительно тенденции изменения значения полезного сигнала на том или ином участке, а вариационное поле в свою очередь характеризует наши предположения о локальной мере изменчивости полезного сигнала в точке. Для определения значения функций $\mu[i]$ и $\sigma[i]$ можно воспользоваться априорными соображениями о приблизительной форме сигнала или использовать предварительную обработку исследуемого сигнала низкочастотными фильтрами, например, скользящим средним. Пусть $z[i]$ сигнал, полученный путем сглаживания исходного. Тогда центроидное и вариационное поля можно определить по формулам:

$$\mu[i] = z[i+1] - z[i], i = 1, \ldots, T-1$$
$$\mu[T] = 0$$
$$\sigma[i] = \lambda + \delta \left| \mu[i] \right|, i = 1, \ldots, T$$

где действительные параметры λ и δ подбираются с учетом конкретного вида сигнала и уровня шумов.

Исходя из формулы (1), при нахождении очередной допустимой точки необходимо просматривать весь сигнал до конца, что может быть связано с большими вычислительными сложностями и не позволяет вести обработку бесконечных сигналов или сигналов, получаемых в реальном времени. Обозначим $A_{i_k}[t] = \max\limits_{i_k < i \le i_k + t} l(i, i_0)$. Тогда можно доказать следующую теорему:

Теорема. Для определения очередной допустимой точки сигнала достаточно просмотреть t точек, где число t - минимальное число, при котором выполнено неравенство

$$\sum_{i=i_k}^{i_k+t} \sigma^2[i] \ge \frac{\exp(-2A_{i_k}[t])}{2\pi}$$

Определение начальной точки сигнала

Рассмотрим теперь более подробно вопрос о нахождении первой допустимой точки. В качестве первой допустимой точки зачастую выступает первая точка исходного сигнала. Однако, не исключены ситуации, когда группа начальных точек исходного сигнала может оказаться шумом и вопрос о поиске первой допустимой точки становится нетривиальным. Здесь предлагается процедура, основанная на дополнении исходного сигнала одной точкой с дальнейшим голосованием по различным начальным точкам.

Более формально процедура поиска начальной точки выглядит следующим образом:

Шаг А. Выбрать интервал поиска начальной точки $[0, T_1]$

Шаг Б. Взять в качестве первой допустимой точки $x[i_0]$ первую точку исходного сигнала $x[1]$

Шаг В. Дополнить исходный сигнал по центроидному полю точкой $x[0] = x[i_0] - \sum_{i=1}^{i_0} \mu[i]$ и провести фильтрацию сигнала на интервал $[0, T_1]$ из начальной точки $x[i_0]$

Шаг Г. Вычислить критерий качества полученной фильтрации $F(i_0)$

Шаг Д. $i_0 = i_0 + 1$. Если $i_0 > T_1$, то конец, иначе перейти к шагу В.

В качестве оптимальной начальной точки выбирается та, при которой достигается минимум критерия качества. Критерием качества фильтрации из различных начальных точек может служить количество точек, признанных шумом. Чем меньше точек оказалось отброшено для данной начальной точки, тем более вероятно, что она является допустимой точкой сигнала.

Как следует из теоремы для поиска допустимой точки достаточно взять T_1 как минимальное t, удовлетворяющее условию:

$$\sum_{i=1}^{t} \sigma^2[i] \ge \frac{\exp(-2A_1[t])}{2\pi}$$

Результаты экспериментов

Изложенная выше технология была применена к анализу дискретных сигналов при решении задачи определения наркотического опьянения по реакции зрачка глаза на вспышку света [3]. Необходимые данные были любезно предоставлены корпорацией "Iritech inc." На рис.1 показан вид типичной пупиллограммы (последовательности изменений размера зрачка в течении 2.5 секунд после возбуждающего импульса). По оси ординат отложен диаметр зрачка по отношению к диаметру радужки. Качественная форма пупиллограммы хорошо известна специалистам. К сожалению, в процессе съемки часто возникают помехи, вызванные расфокусировкой камеры, движениями головы, морганиями пациента и т.п. Это приводит к многочисленным искажениям, которые необходимо обрабатывать. На рис.2 и рис.3 показаны результаты применения ве-

роятностного и обычного фильтра низких частот к типичному зашумленному сигналу. Отдельные участки пупиллограммы (на рисунках они обведены в эллипсы) представляют особую важность для дальнейшего анализа и их форма должна быть как можно меньше искажена в процессе фильтрации. На рисунках хорошо видно, что вероятностная фильтрация обеспечивает более точное определение соответствующих участков пупиллограммы.

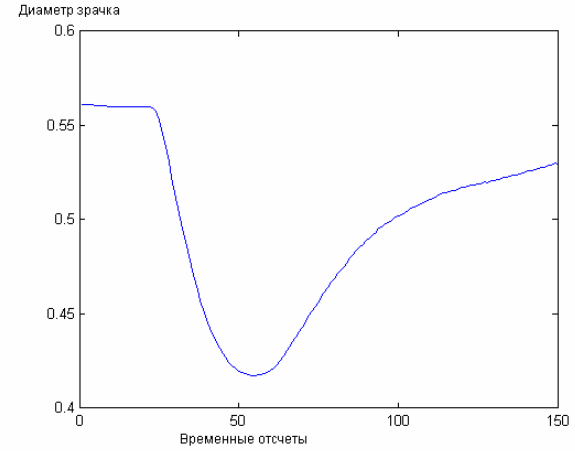

Рис. 1. Общий вид пупиллограммы.

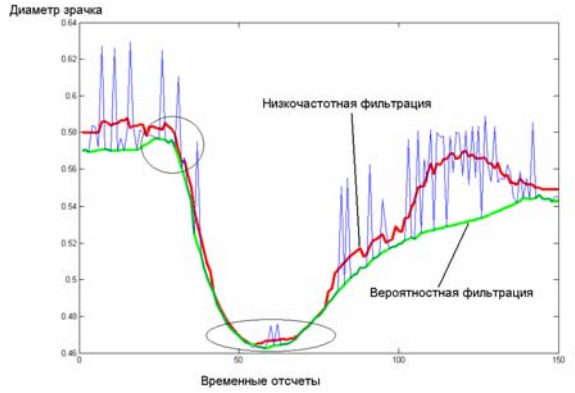

Рис. 2. Применение вероятностного и линейного фильтра низких частот к зашумленному сигналу.

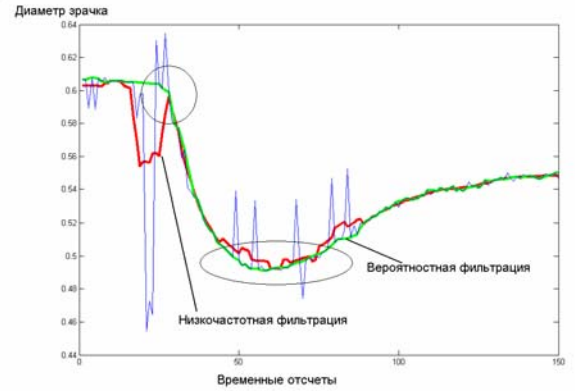

Рис. 3. Применение вероятностного и линейного фильтра низких частот к зашумленному сигналу.

Заключение

В данной работе был предложен метод фильтрации сигналов, использующий вероятностный подход. Алгоритм показал высокую эффективность при решении реальной практической задачи – обработки пупиллограмм. Хорошее качество работы фильтра для задач подобных описанной удалось достичь за счет отказа от традиционных характеристик фильтров - импульсного и порогового отклика. В зависимости от величины импульса и порога отклик на них может меняться. Это позволяет устранять случайные помехи, сохраняя при этом локальные особенности сигнала.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 02-07-90134, 02-07-90137, 03-10-00580, 02-01-00558 и 04-01-00161).

Литература

1. В.В. Моттль, И.Б. Мучник. Скрытые Марковские модели в структурном анализе сигналов. Физматлит, Москва, 1999.
2. S.W. Smith. The Scientist and Engineer’s Guide to Digital Signal Processing. Techn. Publs., California, 1997.
3. Т.И. Долматова, Н.Д. Граевская, Ким Даехун, Н.Н. Варченко, И.Е. Макарчук, К.А. Ганькин, В.В. Лакин, И.Н. Котова, К.В. Лаптева. Скриннинговый метод бинокулярной пупиллометрии в мониторинге функционального состояния спортсменов // Теория и практика физической культуры, № 6, 2001.